LÍNEAS TRIGONOMETRICAS

Las funciones trigonométricas se definieron en la circunferencia unitaria, por lo tanto, a partir de esta se construye el bosquejo de las gráficas de las funciones trigonométricas. Esto es posible por medio de las **líneas trigonométricas**.

Las líneas trigonométricas de un ángulo θ en posición normal son los segmentos cuyas medidas coinciden con cada una de las funciones trigonométricas para el ángulo θ.

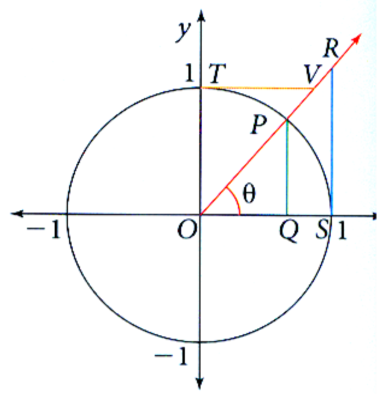


Figura 1

En la figura 1 se muestra el punto P sobre la circunferencia unitaria determinado por el ángulo θ en el primer cuadrante.

Como $\overline{PQ}$ es perpendicular al eje x, se forma el $\triangle OQP$ que es un triángulo rectángulo.

Como $\overline{RS}$ es perpendicular al eje x, se forma el $\triangle OSR$ que es un triángulo rectángulo.

Como $\overline{VT}$ es perpendicular al eje y, se forma el $\triangle VTO$ que también es un triángulo rectángulo.

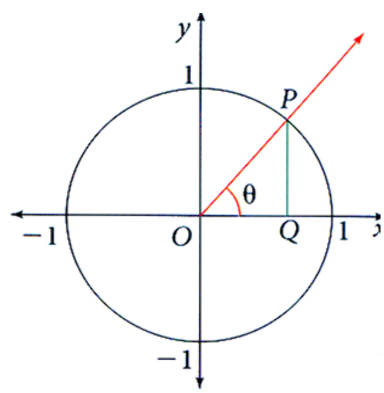


Figura 2

Los $\triangle OQP$, $\triangle OSR$ y $\triangle VTO$ son semejantes, ya que los ángulos correspondientes son congruentes. Así, los lados correspondientes de los tres triángulos son proporcionales.

En el triángulo rectángulo OQP de la figura 2, por definición de sen θ y cos θ se tiene:

sen $\theta = \overline{PQ}$ y $\cos\theta = \overline{OQ}$

Por lo tanto, $\overline{PQ}$ es la línea trigonométrica para sen θ y $\overline{OQ}$ es la línea trigonométrica para cos θ.

En los triángulos rectángulos *OQP* y *OSR* de la figura 3, se tiene:

$$\tan\theta = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{RS}}{1} = \overline{RS}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OR}}{1} = \overline{OR}$$

Por lo tanto, $\overline{RS}$ es la línea trigonométrica para tan θ y $\overline{OR}$ es la línea trigonométrica para sec θ.

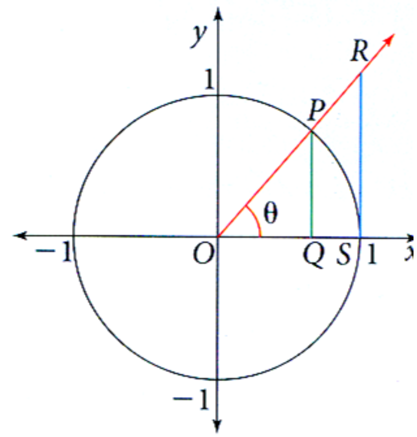


Figura 3

En los triángulos rectángulos *OQP* y *VTO* de la figura 4 se tiene:

$$\cot\theta = \frac{\overline{OQ}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{VT}}{1} = \overline{VT}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{OV}}{\overline{TO}} = \overline{OV}$$

Por lo tanto, *VT* es la línea trigonométrica para cot θ y *OV* es la línea trigonométrica para csc θ.

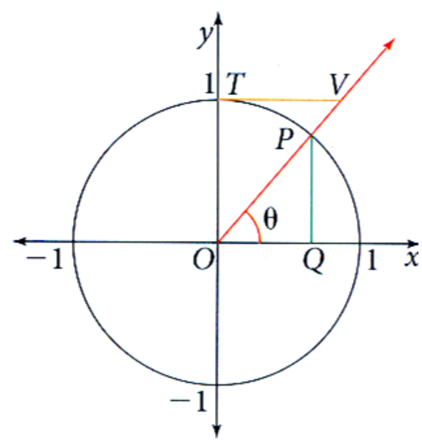


Figura 4

GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Para realizar las gráficas de las funciones trigonométricas se procede de la siguiente manera:

Primero, se traza la circunferencia unitaria y algunos ángulos especiales medidos en radianes en posición normal.

Segundo, se traza la línea trigonométrica respectiva para cada ángulo en relación con la gráfica de la función que se va a construir.

Tercero, para cada medida de los ángulos especiales, se ubica un punto en el eje *x* del plano cartesiano. Luego, se hace corresponder en el eje *y* la respectiva medida de la línea trigonométrica.

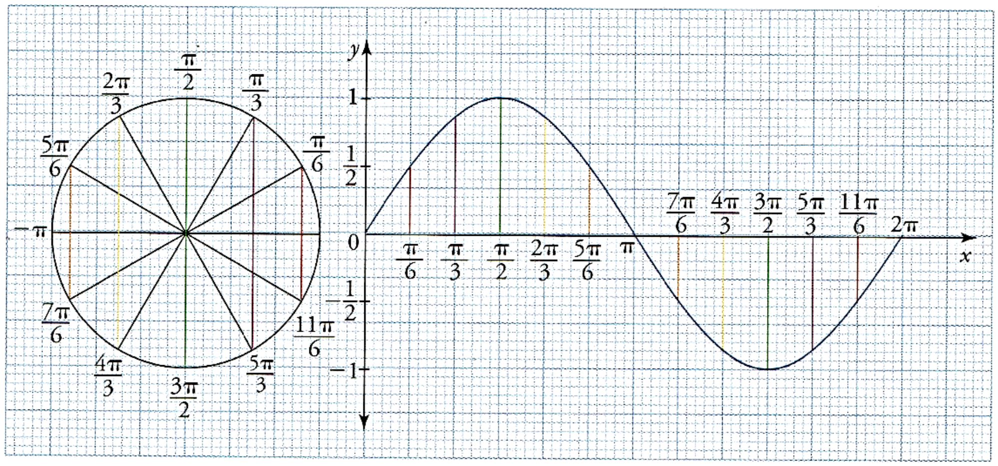
Tabla de valores de $y = \text{sen } x$

x	sen x
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$
π	0
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$
2π	0

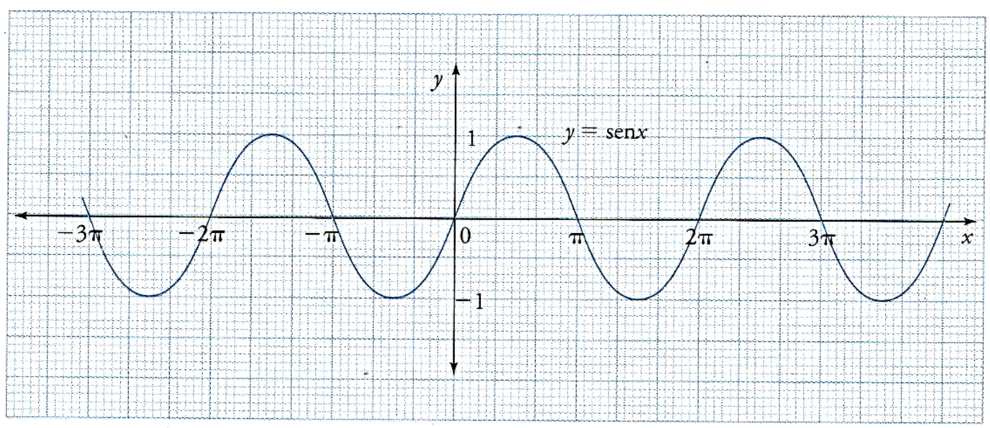
Por último, se construye la gráfica de la función uniendo los puntos.

2.1 Gráfica de la función seno (y = sen x)

Si se sigue el proceso descrito, se obtiene la gráfica de la función $y = \text{sen } x$ entre 0 y 2π a partir de las líneas trigonométricas, como se muestra en la figura.



Cuando la gráfica de la función $y = \text{sen } x$ se construye tomando un intervalo más grande para valores de x, se observa que su gráfica es una repetición del tramo que se ha dibujado en el intervalo de 0 a 2π, en ambos sentidos.



CARACTERÍSTICAS DE LA FUNCIÓN y= sen x

Las siguientes son las características de la función seno:

- La función $y = \text{sen}\, x$ está definida para todos los números reales, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$.
- Como los valores mínimo y máximo que tiene la función $y = \text{sen}\, x$ son -1 y 1, respectivamente, entonces, el rango de la función es el intervalo $[-1, 1]$. Es decir, el conjunto $\{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1\}$.
- La función $y = \text{sen}\, x$ es una función impar. Es decir, $\text{sen}\,(-x) = -\text{sen}\, x$. Por tanto, la gráfica de la función $y = \text{sen}\, x$ es simétrica con respecto al origen del sistema de coordenadas.
- La función $y = \text{sen}\, x$ es una función periódica, con período $p = 2\pi$. Por tanto, $\text{sen}\, x = \text{sen}\,(x + 2n\pi)$ con $n \in \mathbb{Z}$.
- La función $y = \text{sen}\, x$ varía de la siguiente manera:

Cuadrante	Variación de x	Variación de $y = \text{sen}\, x$
I	Entre 0 y $\frac{\pi}{2}$	Crece de 0 a 1
II	Entre $\frac{\pi}{2}$ y π	Decrece de 1 a 0
III	Entre π y $\frac{3\pi}{2}$	Decrece de 0 a -1
IV	Entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π	Crece de -1 a 0

- La función $y = \text{sen}\, x$ corta al eje x para todos los múltiplos de π. Es decir, $y = \text{sen}\, x = 0$, si $x = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$.
- La función $y = \text{sen}\, x$ alcanza su valor máximo, que es 1, en los puntos $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$ y su valor mínimo, que es -1, en los puntos $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$.

Recuerda que...

Una función f es impar si cumple con:

$$f(-x) = -f(x)$$

y una función es periódica si $f(x + p) = f(x)$, con $p > 0$.

2.2 Gráfica de la función coseno ($y = \cos x$)

En forma similar a la gráfica de la función $y = \text{sen}\, x$, se construye la gráfica de la función $y = \cos x$, pero ahora a partir de las líneas trigonométricas de la función $y = \cos x$ entre 0 y 2π.

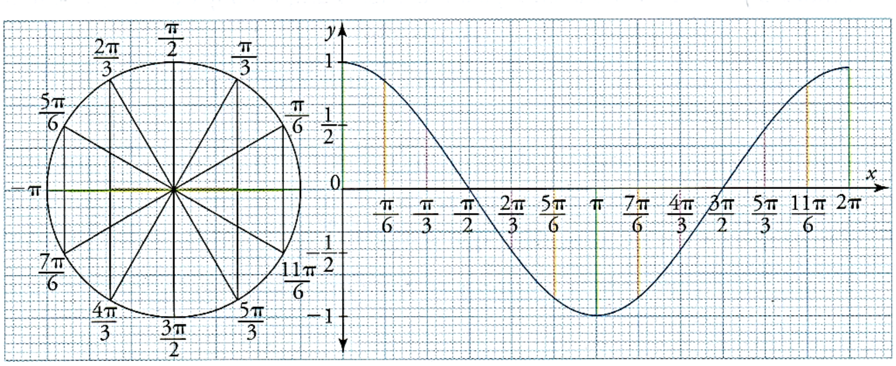
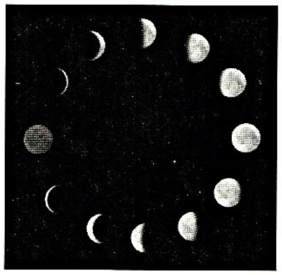


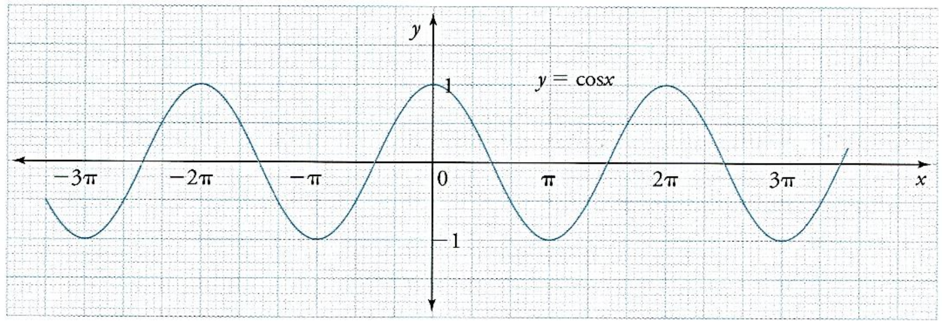
Tabla de valores de $y = \cos x$

x	$\cos x$
0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
π	-1
$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
2π	1



El movimiento de los planetas, las mareas, las estaciones del año, las fases lunares son fenómenos que se repiten en intervalos de tiempo iguales, los llamados **fenómenos periódicos**. Estos fenómenos pueden ser modelados por las funciones trigonométricas.

En general, la gráfica de la función $y = \cos x$ para un intervalo mayor a 2π es:



Características de la función coseno

Las siguientes son las características de la función coseno:

- La función $y = \cos x$ está definida para todos los números reales, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$.
- Como los valores mínimo y máximo que tiene la función $y = \cos x$ son -1 y 1, respectivamente, entonces, el rango de la función es el intervalo $[-1, 1]$. Es decir, el conjunto $\{y \in \mathbb{R} / -1 \leq y \leq 1\}$.
- La función $y = \cos x$ es una función par. Es decir, $\cos(-x) = \cos x$. Por tanto, la gráfica de la función $y = \cos x$ es simétrica con respecto al eje y.
- La función $y = \cos x$ es una función periódica, con período $p = 2\pi$. Por tanto, $\cos x = \cos(x + 2n\pi)$ con $n \in \mathbb{Z}$.

La función $y = \cos x$ varía de la siguiente manera:

Cuadrante	Variación x	Variación de $y = \cos x$
I	Entre 0 y $\frac{\pi}{2}$	Decrece de 1 a 0
II	Entre $\frac{\pi}{2}$ y π	Decrece de 0 a -1
III	Entre π y $\frac{3\pi}{2}$	Crece de -1 a 0
IV	Entre $\frac{3\pi}{2}$ y 2π	Crece de 0 a 1

- La función $y = \cos x$ corta al eje x para todos los múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$. Es decir, $\cos x = 0$, si $x = n\frac{\pi}{2}$ con n número entero impar
- La función $y = \cos x$ alcanza su valor máximo, que es 1, en los puntos $x = n\pi$ donde n es número entero par.
- La función $y = \cos x$ alcanza su valor mínimo, que es -1, en los puntos $x = n\pi$ donde n es número entero impar.
- Para cualquier valor de x, se tiene que $\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$. Por tanto, se puede concluir que el gráfico de la función $y = \cos x$ es el mismo gráfico de la función $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

TRANSFORMACIONES DE GRÁFICAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las reglas para desplazar, dilatar, contraer, reflejar la gráfica de una función se pueden aplicar a las funciones trigonométricas, recordadas en el siguiente diagrama:

A>0: ampliación o reducción vertical

A<0: reflexión respecto al eje X

D: Desplazamiento vertical

$$y = A\,f(Bx + C) + D$$

B>0: ampliación o reducción horizontal

B<0: reflexión respecto al eje Y

C: Desplazamiento horizontal

FUNCIONES SINUSOIDALES

Son funciones relacionadas con las funciones seno y coseno: $y = A\,sen(Bx + C) + D \wedge y = A\cos(Bx + C) + D$ o una combinación de éstas.

La periodicidad de las funciones seno y coseno desempeña un papel importante en la obtención de las gráficas de estas funciones.

Características de estas funciones

Las gráficas de las funciones $y = A\,sen(Bx + C) + D \wedge y = A\cos(Bx + C) + D$, considerando B>0, se pueden obtener a partir de las gráficas de las funciones $y = sen\ x \ \wedge \ y = \cos\ x$ cuyas características se señalan a continuación:

• **Amplitud**: |A|, que es el **promedio de la diferencia** entre los valores máximo y mínimo.

• **Período**: $\dfrac{2\pi}{B}$

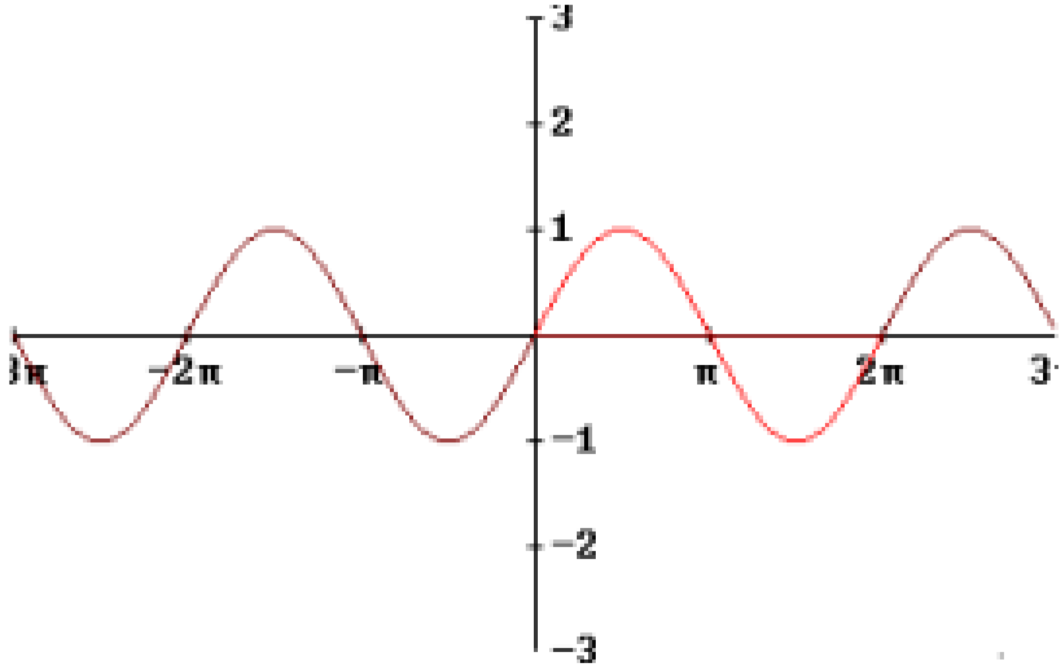
• **Desfase:** $-\dfrac{C}{B}$, desplazamiento horizontal de $-\dfrac{C}{B}$ unidades a la derecha o a la izquierda, según si C es negativo o positivo, de la gráfica de $y = A\,f\,(B\,x)$.

• **Desplazamiento vertical**: traslación vertical en D unidades de la gráfica de $y = A\,f\,(Bx + C)$.

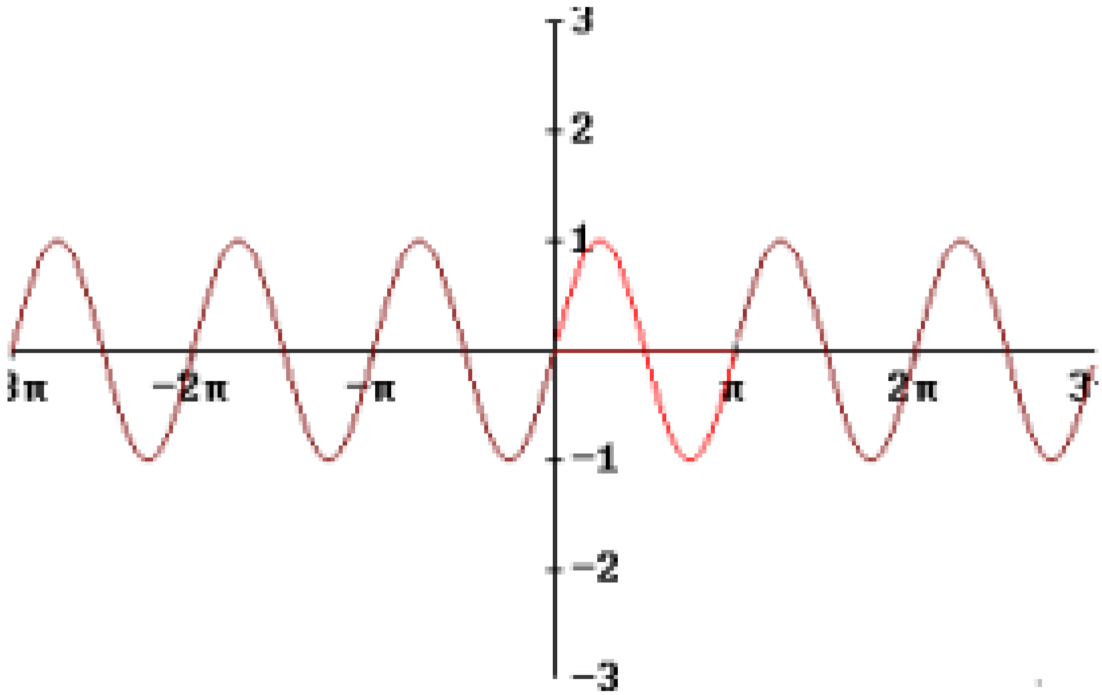
Ejemplo 1. Gráfica de la función $y = -3\,sen\left(2x - \pi/3\right)$.

Amplitud = |-3| = 3, **Período** = $\dfrac{2\ \pi}{2} = \pi$, **Desfase** = $\dfrac{\pi}{6}$

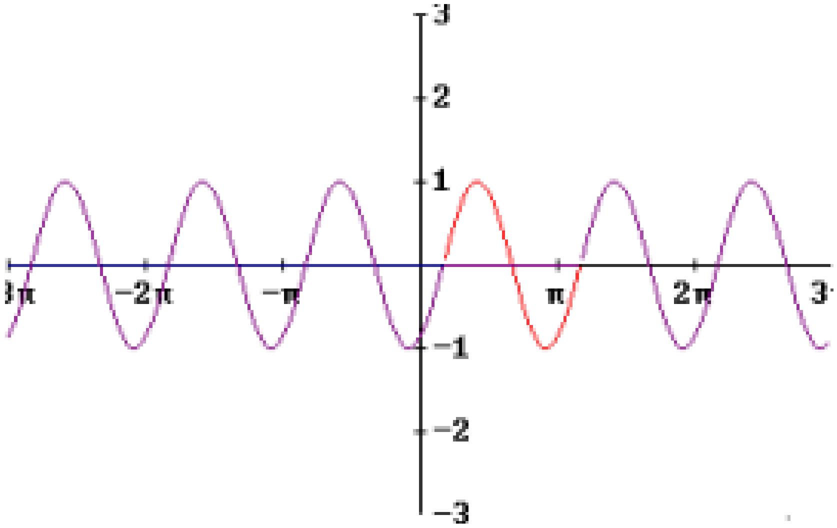
(1) $y = sen(x)$



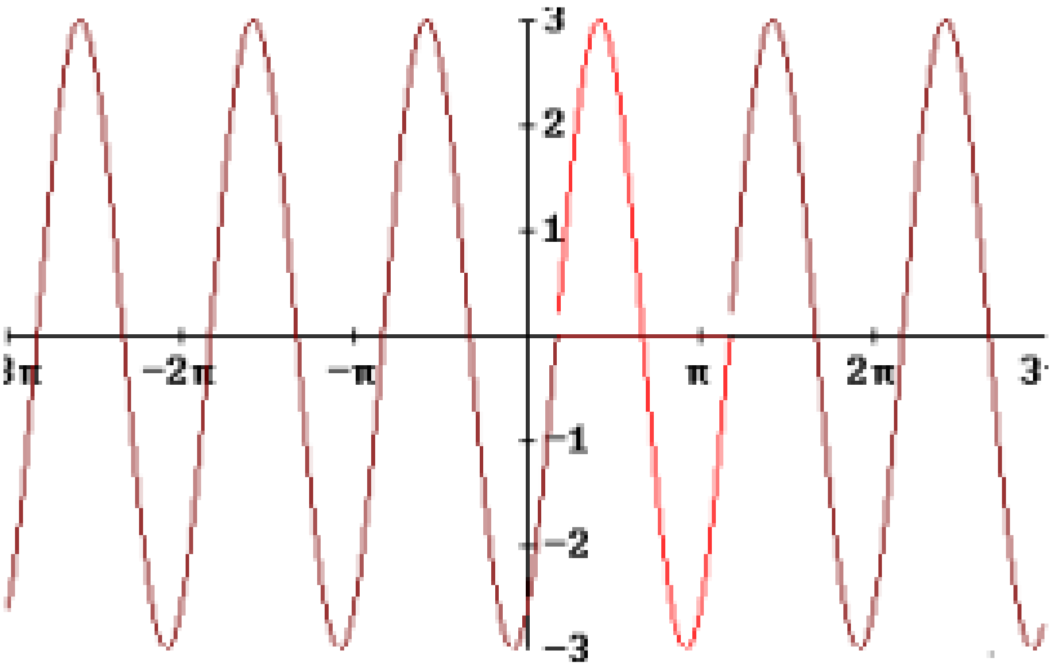
(2) $y = sen\ (2x)$



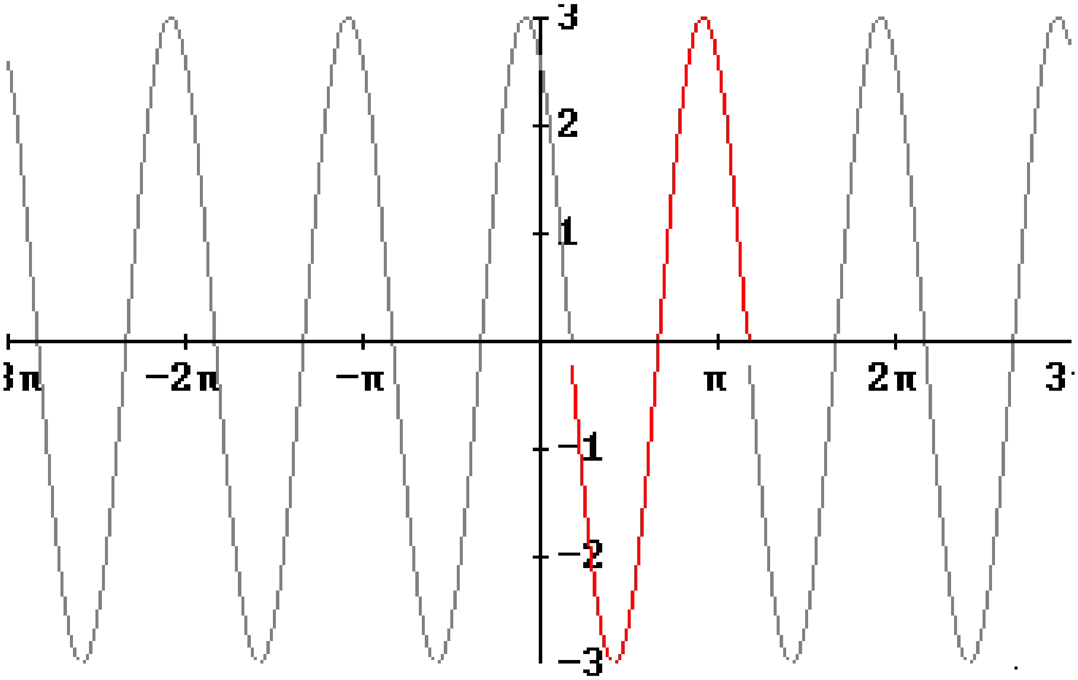
(3) $y = sen\,(2x - \pi / 3)$



(4) $y = 3sen\,(2x - \pi / 3)$

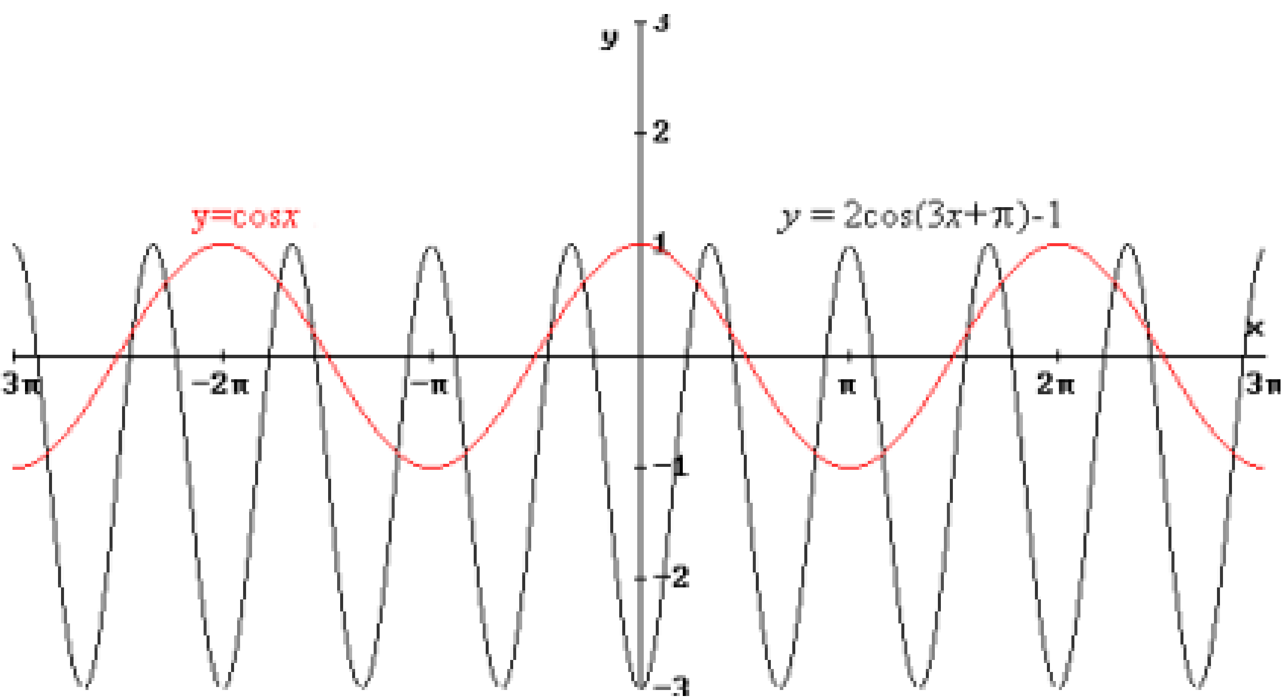


(5) $y = -3sen\,(2x - \pi\ / 3)$



Ejemplo 2. Gráfica de la función $y = 2\cos(3x + \pi) - 1$

Amplitud = 2, **Período** = $\dfrac{2\pi}{3}$, **Desfase** = $-\dfrac{\pi}{3}$, **Desplazamiento vertical** = -1



REFERENCIAS

Ayres Jr., F., & Moyer, R. E. (1991). *Trigonometría*. México: McGRAW-HILL.

Cifuentes Rubiano, J., & Salazar Suárez, F. L. (2010). *Hipertexto.* Bogotá: SANTILLANA S.A.

Ramírez Sarmiento, F. N., & Joya Vega , A. d. (2013). *Los Caminos del Saber Matemáticas 10.* Bogotá: SANTILLANA S.A.